MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 5
20.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

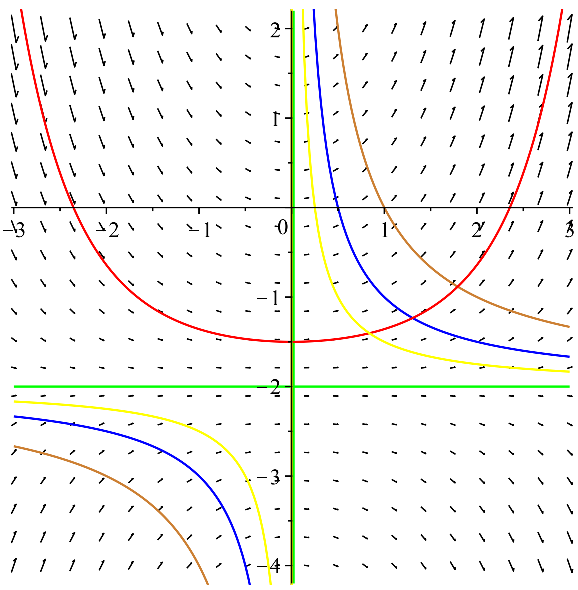
1. a) Aus

$$m = \frac{1}{2}xy + x \iff m = x \cdot \left(\frac{1}{2}y + 1\right) \overset{x \neq 0}{\iff} y = \frac{2m}{x} - 2$$

ergibt sich für

$$\begin{aligned} m = 0: &\quad S_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \ \vee \ y = -2\} \\ m = \frac{1}{4}: &\quad S_{\frac{1}{4}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \frac{1}{2x} - 2\right\} \\ m = \frac{1}{2}: &\quad S_{\frac{1}{2}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -\frac{1}{x} - 2\right\} \\ m = 1: &\quad S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \frac{2}{x} - 2\right\} \end{aligned}$$

b) Die folgende Graphik zeigt S_0 (grün), $S_{\frac{1}{4}}$ (gelb), $S_{\frac{1}{2}}$ (blau), S_1 (gold), das Richtungsfeld der Differentialgleichung (die Pfeilspitzen und die unterschiedliche Länge der Linienelemente sind zu ignorieren), sowie den Graphen der Lösung der Differentialgleichung mit Startbedingung $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$ (rot).



c) Bei $(\star)$ handelt es sich um eine lineare DGL 1. Ordnung mit

$$a(x) = \frac{1}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$b(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL sieht nach Satz 2.4 a) folgendermaßen aus:

$$\varphi_c(x) = \ c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}, \ \ x \in \mathbb{R},$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist:

$$\varphi_p(x) = u(x)\, e^{\frac{1}{4}x^2},$$

wobei $u(x), x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion zu $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{4}x^2}, x \in \mathbb{R}$, ist, also z.B.

$$u(x) = -2e^{-\frac{1}{4}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $\varphi_p(x) = -2e^{-\frac{1}{4}x^2}\, e^{\frac{1}{4}x^2} = -2, \ x \in \mathbb{R}$, eine partikuläre Lösung von $(\star)$.
Somit ist die allgemeine Lösung von $(\star)$:

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_p(x) = c\, e^{\frac{1}{4}x^2} - 2, \quad x \in \mathbb{R}, \ \text{mit} \ c \in \mathbb{R}.$$

2. a) Hier handelt es sich um eine homogene lineare DGL 1. Ordnung $y' = a(x) \cdot y$ mit

$$a :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

Eine Stammfunktion zu a ist

$$A(x) = x + 2\ln|x|, \qquad x \in]-\infty, 0[.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL nach 2.4 der Vorlesung

$$\varphi_c(x) = c \cdot e^{A(x)} \ = \ c \cdot e^{x + 2\ln|x|} = c \cdot e^x \cdot x^2, \qquad x \in]-\infty, 0[,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Die maximalen Lösungen, deren Graph im Innern des 2. Quadranten verläuft, sind dann also

$$\varphi_c(x) = c \cdot e^x \cdot x^2, \qquad x \in]-\infty, 0[,$$

mit $c > 0$.

b) Mit $x < 0$ und $y > 0$ ist

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot y = 0 \quad \iff \quad 1 + \frac{2}{x} = 0 \quad \iff \quad x = -2;$$

für jede (maximale) Lösung $\varphi :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$, deren Graph im Innern der 2. Quadranten verläuft, ist also

$$\varphi'(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \underbrace{\varphi(-2)}_{>0} \begin{cases} > 0, \ \text{für } x \in]-\infty, -2[\\ = 0, \ \text{für } x = -2 \\ < 0, \ \text{für } x \in]-2, 0[. \end{cases}$$

Damit ist φ streng monoton wachsend auf $]-\infty, -2]$ und streng monoton fallend auf $[-2, 0[$.
Also hat φ in $x_0 = -2$ ein lokales (sogar globales) Maximum.

ODER SO:

Sei $\varphi :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine (maximale) Lösung φ, deren Graph im Innern der 2. Quadranten verläuft. Dann zeigt die DGL, daß φ sogar zweimal differenzierbar ist mit (Produktregel!)

$$\varphi''(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \varphi(x) + \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \varphi'(x), \quad x \in]-\infty, 0[.$$

Ferner gilt für $x < 0$

$$\varphi'(x) = 0 \qquad \iff \qquad x = -2$$

und $\varphi''(-2) = -\frac{2}{(-2)^2} \cdot \underbrace{\varphi(-2)}_{>0} < 0$. Also hat φ in $x_0 = -2$ ein lokales (sogar globales) Maximum.

3. Bei $y' = -e^{-x}\, y$ handelt es sich um eine homogene lineare DGL 1. Ordnung mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = -e^x.$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = -e^x,$$

eine Stammfunktion von a ist, ist nach Satz 2.4

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{-e^x},$$

für $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $y' = a(x)\, y$. Wegen

$$\varphi_c(0) = -1 \iff c\, e^{-e^0} = -1 \iff c\, e^{-1} = -1 \iff c = -e$$

ist die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -e \cdot e^{-e^x},$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems.

Zur Bestimmung des Wertebereichs $W_\varphi = \varphi(\mathbb{R})$ verwenden wir die bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion: wegen

$$\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} =]0, \infty[\,, \qquad \text{also} \qquad \{-e^x \mid x \in \mathbb{R}\} =]-\infty, 0[\,,$$

ergibt sich

$$\left\{e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} =]0, 1[\,, \qquad \text{also} \qquad \varphi(\mathbb{R}) = \left\{-e \cdot e^{-e^x} \mid x \in \mathbb{R}\right\} =]-e, 0[\,.$$

4. Die gegebene Differentialgleichung (wir schreiben kurz y statt $y(x)$, und y' statt $y'(x)$)

$$y' \cos(x) - 2y \sin(x) = x, \qquad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

läßt sich, weil $\cos x \neq 0$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[=: I$, äquivalent umformen zu

$$y' = 2\,\frac{\sin x}{\cos x} \cdot y + \frac{x}{\cos x}, \qquad x \in I. \qquad (*)$$

Es liegt also eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung vor mit den stetigen Funktionen

$$\begin{aligned} a : I &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = 2\,\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \tan x, \\ b : I &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{x}{\cos x}. \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst die homogene lineare DGL

$$y' = 2\frac{\sin x}{\cos x} \cdot y, \qquad x \in I \qquad (*_0)$$

<u>Allgemeine Lösung von $(*_0)$:</u>

Eine Stammfunktion A von a ist

$$A(x) = -2\, \ln|\cos x| \;=\; -2 \ln(\cos x) \;=\; \ln\left((\cos x)^{-2}\right) \;=\; \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right), \quad x \in I.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $(*_0)$

$$\varphi_c(x) = c\, e^{A(x)} = c\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right), \quad x \in I.$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.

Partikuläre Lösung von $(*)$:

Für eine partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ machen wir den Ansatz $\varphi_p(x) = u(x)e^{A(x)}$. Dabei ist u eine Stammfunktion zu

$$h(x) := b(x)\, e^{-A(x)} = \frac{x}{\cos x} \cdot e^{-\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}} = \frac{x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = x \cdot \cos x, \quad x \in I.$$

Partielle Integration liefert

$$\int x \cdot \cos x\, dx = \big[x \cdot \sin x\big] - \int 1 \cdot \sin x\, dx \; = \; x \sin x + \cos x + C,$$

also ist (z.B.) $\quad u(x) = x \sin x + \cos x,\ x \in I$, eine Stammfunktion von h.
Damit ist

$$\varphi_p(x) = u(x) \cdot e^{A(x)} = (x \sin x + \cos x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \;\; x \in I,$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:

Nach 2.4 ist dann

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_p(x) = c\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + (x \sin x + \cos x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in I,$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung von $(*)$.